CAPITOLUL 1

Elemente de algebră booleeană

Algebra Boole a fost concepută de către matematicianul englez George Boole (1815 ÷ 1864) ca o metodă simbolică de tratare a funcţiilor logicii formale. Abia în 1938, Claude Shannon avea să o utilizeze pentru prima oară la analiza circuitelor de comutaţie.

Algebra Boole, cunoscută şi sub denumirea de *Algebra logică* sau *Calculul propoziţional***,** operează cu *propoziţii* despre care se poate afirma că sunt *adevărate* sau *false*. Fiecărei propoziţii i se poate asocia o *variabilă* (numită variabilă *logică* sau *binară*) care ia valoarea 1 când propoziţia este adevărată şi 0 când propoziţia este falsă.

Exemple:
Fie un întrerupător X căruia îi asociem variabila x, fig. 1.1 a.

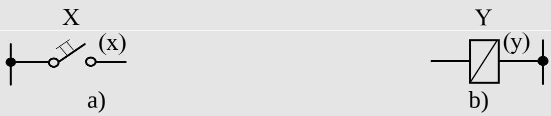


Fig. 1.1. Explicativă pentru propoziţiile simple
a) întrerupătorul X este (nu este) acţionat
b) bobina releului Y este (nu este) excitată

Propoziţia "Întrerupătorul X este acţionat" poate fi adevărată (x=1) sau falsă (x=0).
Similar, pentru bobina de releu Y, fig. 1.1 b, se poate construi propoziţia "Bobina Y este excitată", propoziţie care poate fi adevărată (y=1) sau falsă (y=0).

Propoziţiile pot fi *simple* (cazul exemplelor anterioare) sau *compuse*.

Propoziţiile compuse sunt cele a căror valoare de adevăr depinde de valoarea de adevăr a propoziţiilor simple din care se compun şi de tipul *legăturilor logice* dintre acestea.

Legăturile logice (*operaţiile*) de bază sunt prezentate în tab. 1.1.

Se observă că denumirile şi simbolurile operaţiilor logice diferă de la un domeniu la altul. În cele ce urmează, vom utiliza aproape exclusiv notaţiile din matematică.

Tab. 1.1. Denumirea şi simbolizarea operaţiilor de bază

Matematică	***Logică***	***Tehnică***
Prima lege de compoziţie (suma logică) $x_1 + x_2$	Disjuncţie $x_1 \vee x_2$	SAU (OR) $x_1 \vee x_2$
A doua lege de compoziţie (produsul logic) $x_1 \cdot x_2$	Conjuncţie $x_1 \wedge x_2$	ŞI (AND) $x_1 \cdot x_2$
Elementul invers $\overline{x}$	Negaţie $\rceil x$	NU (NOT) $\overline{x}$

Propoziţia compusă poartă numele de *funcţie logică* sau *funcţie binară* şi ia valoarea logică 1 cînd este adevărată şi 0 cînd este falsă.

Funcţia logică este complet definită cu ajutorul unui tabel finit (*tabel de adevăr*) avînd în primele coloane valorile logice ale propoziţiilor simple (considerate independente) şi în ultima coloană - valorile logice ale funcţiei, obţinute prin aplicarea operaţiilor logice asupra valorilor logice corespunzătoare ale propoziţiilor simple.

1.1. Funcţii logice elementare

Pornind de la expresia generală a unei funcţii de n variabile binare,

$$y = f\,(x_1, x_2, ..., x_n), \tag{1.1}$$

observăm că numărul total de termeni care se pot construi cu ajutorul celor n variabile binare este $m = 2^n$, iar numărul total de funcţii care rezultă combinând între ei cei m termeni este:

$$N_{fn} = C_m^0 + C_m^1 + ... + C_m^n = \sum_{j=0}^{m} \frac{m!}{j!(m-j)!} = 2^m = 2^{2^n} \tag{1.2}$$

Particularizând relaţiile (1.2) pentru n = 0, 1 şi 2 variabile, obţinem:

- pentru n = 0, $N_{f0} = 2$ funcţii şi anume $y_1 = 0$ şi $y_2 = 1$;

- pentru n = 1, deci y = f (x), $N_{f1} = 4$ funcţii şi anume $y_1 = 0$, $y_2 = 1$, $y_3 = x$, $y_4 = \overline{x}$;

- pentru n = 2, deci $y = f\,(x_1, x_2)$, se obţin $N_{f2} = 16$ funcţii pe care le prezentăm în tabelul 1.2.

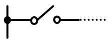
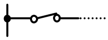
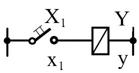
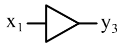
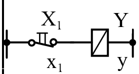
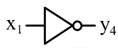
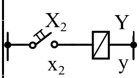
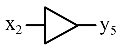
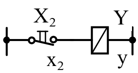
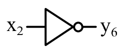
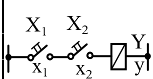
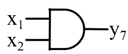
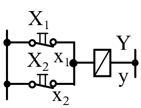
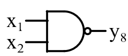
Deşi tabelul 1.2 este sugestiv prin el însuşi, prezentăm în continuare unele observaţii şi comentarii utile:

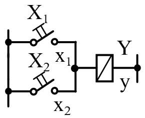
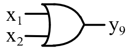
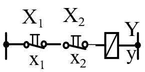
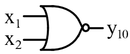
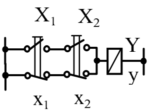
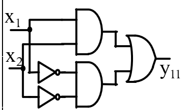
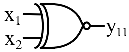
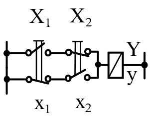
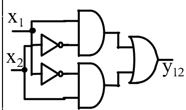
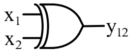
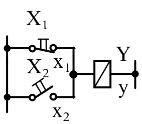
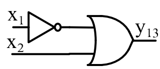
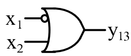
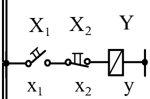
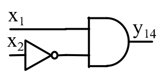
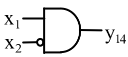
- ordinea x_2x_1 a variabilelor din tabelele de adevăr decurge din modul de scriere binară a unui număr zecimal:

$$(N)_{zec.} = 2^{n-1}x_n + 2^{n-2}x_{n-1} + ... + 2^1x_2 + 2^0x_1 = (x_nx_{n-1} ... x_2x_1)_{bin.}, \tag{1.3}$$

unde x_n este - după cum se observă - bitul cel mai semnificativ, iar x_1 - bitul cel mai puțin semnificativ.

Tab. 1.2. Funcții logice de două variabile

Nr. crt.	CIRCUITUL		FUNCȚIA LOGICĂ			
	Structura releistică	***Denumirea***	***Tabelul de adevăr***	***Schema logică echivalentă***	***Simbolul și expr. alg.***	***Denu-mirea***
1.		Circuit deschis			$y_1 = 0$	Element nul
2.		Circuit închis			$y_2 = 1$	Element unu
3.		Neinversor	x_1 | y_3 0 | 0 1 | 1		 $y_3 = x_1$	Identita-te
4.		Inversor	x_1 | y_4 0 | 1 1 | 0		 $y_4 = \overline{x}_1$	Negație
5.		Neinversor	x_2 | y_5 0 | 0 1 | 1		 $y_5 = x_2$	Identita-te
6.		Inversor	x_2 | y_6 0 | 1 1 | 0		 $y_6 = \overline{x}_2$	Negație
7.		ȘI (AND)	x_2 | x_1 | y_7 0 | 0 | 0 0 | 1 | 0 1 | 0 | 0 1 | 1 | 1		 $y_7 = x_1 \cdot x_2$	Conjunc-ție
8.		ȘI-NU (NAND)	x_2 | x_1 | y_8 0 | 0 | 1 0 | 1 | 1 1 | 0 | 1 1 | 1 | 0		 $y_8 = \overline{x_1 \cdot x_2}$	Negarea conjunc-ției

<table>
<tr><th rowspan="2">Nr. crt.</th><th colspan="2">CIRCUITUL</th><th colspan="4">FUNCȚIA LOGICĂ</th></tr>
<tr><th>Structura releistică</th><th>Denumirea</th><th>Tabelul de adevăr</th><th>Schema logică echivalentă</th><th>Simbolul şi expr. alg.</th><th>Denumirea</th></tr>
<tr><td>9.</td><td></td><td>SAU (OR)</td><td><table><tr><th>x_2</th><th>x_1</th><th>y_9</th></tr><tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr><tr><td>0</td><td>1</td><td>1</td></tr><tr><td>1</td><td>0</td><td>1</td></tr><tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr></table></td><td></td><td>
$y_9 = x_1 + x_2$</td><td>Disjuncție</td></tr>
<tr><td>10.</td><td></td><td>SAU-NU (NOR)</td><td><table><tr><th>x_2</th><th>x_1</th><th>y_{10}</th></tr><tr><td>0</td><td>0</td><td>1</td></tr><tr><td>0</td><td>1</td><td>0</td></tr><tr><td>1</td><td>0</td><td>0</td></tr><tr><td>1</td><td>1</td><td>0</td></tr></table></td><td></td><td>
$y_{10} = \overline{x_1 + x_2}$</td><td>Negarea disjuncției</td></tr>
<tr><td>11.</td><td></td><td>COINCIDENȚĂ (NXOR)</td><td><table><tr><th>x_2</th><th>x_1</th><th>y_{11}</th></tr><tr><td>0</td><td>0</td><td>1</td></tr><tr><td>0</td><td>1</td><td>0</td></tr><tr><td>1</td><td>0</td><td>0</td></tr><tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr></table></td><td></td><td>
$y_{11} = x_1 \sim x_2 =$
$x_1 x_2 + \bar{x}_1 \bar{x}_2$</td><td>Echivalență</td></tr>
<tr><td>12.</td><td></td><td>SAU EXCLUSIV (XOR)</td><td><table><tr><th>x_2</th><th>x_1</th><th>y_{12}</th></tr><tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr><tr><td>0</td><td>1</td><td>1</td></tr><tr><td>1</td><td>0</td><td>1</td></tr><tr><td>1</td><td>1</td><td>0</td></tr></table></td><td></td><td>
$y_{12} = x_1 \oplus x_2 =$
$\bar{x}_1 x_2 + x_1 \bar{x}_2$</td><td>Negarea echivalenței</td></tr>
<tr><td>13.</td><td></td><td>(nu are denumire consacrată)</td><td><table><tr><th>x_2</th><th>x_1</th><th>y_{13}</th></tr><tr><td>0</td><td>0</td><td>1</td></tr><tr><td>0</td><td>1</td><td>0</td></tr><tr><td>1</td><td>0</td><td>1</td></tr><tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr></table></td><td></td><td>
$y_{13} = \bar{x}_1 + x_2$</td><td>Implicație directă</td></tr>
<tr><td>14.</td><td></td><td>INTERDICȚIE</td><td><table><tr><th>x_2</th><th>x_1</th><th>y_{14}</th></tr><tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr><tr><td>0</td><td>1</td><td>1</td></tr><tr><td>1</td><td>0</td><td>0</td></tr><tr><td>1</td><td>1</td><td>0</td></tr></table></td><td></td><td>
$y_{14} = \overline{\bar{x}_1 + x_2}$
$= x_1 \cdot \bar{x}_2$</td><td>Negarea implicației directe</td></tr>
</table>